8. УНИТАРНИ И АНТИУНИТАРНИ ОПЕРАТОРИ

(8.1) Нека је $\mathbb{W}$ потпростор коначно-димензионалног унитарног простора $\mathbb{U}^n$ инваријантан на деловање оператора $\hat{A}$ из $\mathbb{L}(\mathbb{U}^n,\mathbb{U}^n)$.

(а) Показати да је ортокомплемент $\mathbb{W}^{\perp}$ *инваријантан* на деловање оператора $\hat{A}^{\dagger}$;

(б) Показати да је ортокомплемент $\mathbb{W}^{\perp}$ *инваријантан* на деловање оператора $\hat{A}$ ако је овај *унитаран*.

Препостављено је да је потпростор $\mathbb{W}$ инваријантан на деловање оператора $\hat{A}$, што значи да важи $\hat{A}|w\rangle = |w\rangle$, где су $|w\rangle \in \mathbb{W}$, $\hat{A}|w\rangle \in \mathbb{W}$.

(а) Да би ортокомплемент $\mathbb{W}^{\perp}$ био инваријантан на деловање оператора $\hat{A}^{\dagger}$ морало би да важи да је $\hat{A}^{\dagger}\left|w^{\perp}\right\rangle = \left|w^{\perp}\right\rangle$, где су $\left|w^{\perp}\right\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$, $\hat{A}\left|w^{\perp}\right\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$. Ово се проверава применом дефиниционе формуле за адјунговане операторе на израз $\left\langle w\middle|\hat{A}^{\dagger} w^{\perp}\right\rangle$, чиме се добија

$$\left\langle w\middle|\hat{A}^{\dagger} w^{\perp}\right\rangle = \left\langle \hat{A} w\middle|w^{\perp}\right\rangle.$$

Како је већ речено, вектор $\hat{A}|w\rangle$ припада потпростору $\mathbb{W}$ и једнак је вектору $|w\rangle$, те ће бити

$$\left\langle w\middle|\hat{A}^{\dagger} w^{\perp}\right\rangle = \left\langle w\middle|w^{\perp}\right\rangle.$$

Први вектор $|w\rangle$ у скаларном производу припада потпростору $\mathbb{W}$, док други вектор $\left|w^{\perp}\right\rangle$ припада ортокомплементу $\mathbb{W}^{\perp}$; њихов скаларни производ по самој дефиницији ортогоналне суме мора бити једнак нули. Добија се израз

$$\left\langle w\middle|\hat{A}^{\dagger} w^{\perp}\right\rangle = 0$$

који уствари значи да је

$$\hat{A}^{\dagger}\left|w^{\perp}\right\rangle \in \mathbb{W}^{\perp},$$

те је ортокомплемент $\mathbb{W}^{\perp}$ заиста инваријантан на деловање оператора $\hat{A}^{\dagger}$ - ликови које он даје као и оригинали на које делује припадају истом потпростору, ортокомплементу $\mathbb{W}^{\perp}$.

(б) Да би ортокомплемент био инваријантан на деловање оператора $\hat{A}$ морало би да важи да је $\hat{A}\left|w^{\perp}\right\rangle = \left|w^{\perp}\right\rangle$, где су $\left|w^{\perp}\right\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$, $\hat{A}\left|w^{\perp}\right\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$. Ово се проверава заменом вектора $|w\rangle$ вектором $\hat{A}|w\rangle$ у изразу $\left\langle w\middle|\hat{A} w^{\perp}\right\rangle$, што даје

$$\left\langle w\middle|\hat{A} w^{\perp}\right\rangle = \left\langle \hat{A} w\middle|\hat{A} w^{\perp}\right\rangle.$$

Ако би оператор $\hat{A}$ био унитарни оператор, важило би да је $\left\langle \hat{A}w \middle| \hat{A}w^{\perp} \right\rangle = \left\langle w \middle| w^{\perp} \right\rangle$, те би горњи израз попримио следећи облик

$$\left\langle w \middle| \hat{A}w^{\perp} \right\rangle = \left\langle w \middle| w^{\perp} \right\rangle.$$

Из истог разлога као и малопре - први вектор $|w\rangle$ у скаларном производу припада потпростору $\mathbb{W}$, а други вектор $\left|w^{\perp}\right\rangle$ припада ортокомплементу $\mathbb{W}^{\perp}$ - њихов скаларни производ по самој дефиницији ортогоналне суме мора бити једнак нули

$$\left\langle w \middle| \hat{A}w^{\perp} \right\rangle = 0,$$

а ово значи да је

$$\hat{A}\left|w^{\perp}\right\rangle \in \mathbb{W}^{\perp},$$

те је ортокомплемент $\mathbb{W}^{\perp}$ заиста инваријантан на деловање унитарног оператора $\hat{A}$.

(8.2) Доказати следеће

(а) За свака два ортонормирана базиса $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \ldots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ и $\{|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle, |\bar{\mathrm{e}}_2\rangle, \ldots, |\bar{\mathrm{e}}_n\rangle\}$ у коначно-димензионалном унитарном простору $\mathbb{U}^n$ постоји један унитарни оператор $\hat{U}$, такав да је $\hat{U}|\mathrm{e}_i\rangle = |\bar{\mathrm{e}}_i\rangle$, $(i = \overline{1,n})$;

(б) Показати да, за свака два скупа вектора $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_m\rangle\}$ и $\{|\bar{v}_1\rangle, |\bar{v}_2\rangle, \ldots, |\bar{v}_m\rangle\}$, $(m \le n)$ из истог простора а за које важи да је $\langle v_i | v_j \rangle = \langle \bar{v}_i | \bar{v}_j \rangle$, $(i, j = \overline{1,m})$, постоји унитарни оператор $\hat{U}$, такав да је $\hat{U}|v_i\rangle = |\bar{v}_i\rangle$, $(i = \overline{1,m})$.

(а) Прво се од два произвољна вектора написана као линеарне комбинације ортонормираних вектора из првог базиса

$$|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle \quad \text{и} \quad |v_2\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i |\mathrm{e}_i\rangle$$

формира скаларни производ

$$\left\langle \hat{U} v_1 \middle| \hat{U} v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{U}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle\right) \middle| \hat{U}\left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j |\mathrm{e}_j\rangle\right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{U} |\mathrm{e}_i\rangle \middle| \sum_{j=1}^{n} \eta_j \hat{U} |\mathrm{e}_j\rangle \right\rangle .$$

На основу прве три особине скаларног производа, следи да суме и коефицијенти развоја могу да изађу испред скаларног производа

$$\left\langle \hat{U} v_1 \middle| \hat{U} v_2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^* \eta_j \left\langle \hat{U} |\mathrm{e}_i\rangle \middle| \hat{U} |\mathrm{e}_j\rangle \right\rangle .$$

Према поставци задатка, вектори унутар скаларног производа једнаки су

$$\hat{U}|\mathrm{e}_i\rangle = |\bar{\mathrm{e}}_i\rangle \quad \text{и} \quad \hat{U}|\mathrm{e}_j\rangle = |\bar{\mathrm{e}}_j\rangle$$

те се добија да је

$$\left\langle \hat{U} v_1 \middle| \hat{U} v_2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^* \eta_j \left\langle \bar{\mathrm{e}}_i \middle| \bar{\mathrm{e}}_j \right\rangle .$$

Будући да је и други задати базис ортонормиран, мора бити

$$\left\langle \hat{U} v_1 \middle| \hat{U} v_2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^* \eta_j \, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \eta_i ,$$

што је уствари једнако скаларном производу

$$\left\langle \hat{U} v_1 \middle| \hat{U} v_2 \right\rangle = \langle v_1 | v_2 \rangle .$$

Ово је, наравно, управо један од три облика дефиниционе формуле за унитарни оператор $\hat{U}$.

(б) Из Грамове детерминанте формиране од скупова $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_m\rangle\}$ и $\{|\overline{v}_1\rangle, |\overline{v}_2\rangle, \ldots, |\overline{v}_m\rangle\}$ може се видети да ти скупови имају исти број линеарно независних вектора. Стога се из њих могу одабрати два скупа од по, рецимо, k линеарно независних вектора сваки. Потом се од та два скупа Грам-Шмитовим поступком ортонормирања образују два ортонормирана базиса $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \ldots, |\mathrm{e}_k\rangle\}$ и $\{|\overline{\mathrm{e}}_1\rangle, |\overline{\mathrm{e}}_2\rangle, \ldots, |\overline{\mathrm{e}}_k\rangle\}$. Ова два базиса се потом допуне до два ортонормирана базиса у читавом простору, а затим се као у случају **(а)** дефинише унитарни оператор $\hat{U}$. Потом није тешко проверити да је $\hat{U}|v_i\rangle = |\overline{v}_i\rangle$.

(8.3) (а) Доказати је *модуо* детерминанте унитарног оператора једнак јединици, односно да не зависи од базиса у коме се матрицом представља оператор;

(б) Ако је $\hat{U}$ унитарни оператор, показати да је $\alpha\hat{U}$ такође унитарни оператор акко је $|\alpha|=1$.

(а) На основу раније добијеног израза

$$\det\left(\hat{T}^{-1}\hat{A}\hat{T}\right)=\det\hat{T}^{-1}\det\hat{A}\det\hat{T}=\det\hat{T}^{-1}\det\hat{T}\det\hat{A}=\det\left(\hat{T}^{-1}\hat{T}\right)\det\hat{A}=\det\hat{I}\det\hat{A}=\det\hat{A}$$

познато је да детерминанта матрице којом се представља оператор у неком базису не зависи од избора базиса.

У ортонормираном базису је онда

$$1=\det\hat{I}=\det\left(\hat{U}^{-1}\hat{U}\right)=\det\left(\hat{U}^{\dagger}\hat{U}\right)=\det\hat{U}^{\dagger}\det\hat{U}=\left|\det\hat{U}\right|^{2},$$

одакле је, наравно

$$\left|\det\hat{U}\right|=1.$$

(б) Ако је $\hat{U}$ унитарни оператор, то значи да је $\hat{U}^{\dagger}=\hat{U}^{-1}$, а то значи да важи

$$\hat{U}^{\dagger}\hat{U}=\hat{I}.$$

Да би оператор $\alpha\hat{U}$ био унитаран, морала би да важи формула

$$\left(\alpha\hat{U}\right)^{\dagger}\left(\alpha\hat{U}\right)=\hat{I}.$$

Под претпоставком да оператор $\alpha\hat{U}$ заиста јесте унитаран, биће

$$\begin{aligned}1=\det\hat{I}=\det\left[\left(\alpha\hat{U}\right)^{\dagger}\left(\alpha\hat{U}\right)\right]&=\det\left[\left(\alpha\hat{U}\right)^{\dagger}\right]\det\left(\alpha\hat{U}\right)=\det\left(\alpha^{*}\hat{U}^{\dagger}\right)\det\left(\alpha\hat{U}\right)\\&=\alpha^{*}\alpha\det\hat{U}^{\dagger}\det\hat{U}=|\alpha|^{2}\det\left(\hat{U}^{\dagger}\hat{U}\right)=|\alpha|^{2}\det\hat{I}=|\alpha|^{2}\end{aligned}$$

односно

$$|\alpha|=1.$$

(8.4) Одредити који су од следећих оператора у векторском простору $\mathbb{C}^3$ *унитарни*

(а) $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(i\xi_2,\xi_3,-\xi_1)$,

(б) $\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\left(\frac{\xi_2+\xi_3}{\sqrt{2}},\frac{\xi_2-\xi_3}{\sqrt{2}},i\xi_1\right)$,

(в) $\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_2,\xi_1,\xi_1)$,

а потом добити њихове репрезентационе матрице, прво у апсолутном базису

$$\{|\mathrm{e}_1\rangle=(1,0,0),|\mathrm{e}_2\rangle=(0,1,0),|\mathrm{e}_3\rangle=(0,0,1)\}$$

а потом у базису

$$\{|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle=(1,1,1),|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle=(1,1,0),|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle=(1,0,0)\}.$$

У оба наведена базиса још одредити и матрице њихових *адјунгованих* оператора.

(а) Унитарност задатог оператора $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(i\xi_2,\xi_3,-\xi_1)$ проверава се на следећи начин

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}v_1|\hat{A}v_2\rangle&=\langle\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|\hat{A}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\rangle=\langle(i\xi_2,\xi_3,-\xi_1)|(i\eta_2,\eta_3,-\eta_1)\rangle\\&=(i\xi_2)^*i\eta_2+\xi_3^*\eta_3-\xi_1^*(-\eta_1)=-i\xi_2^*i\eta_2+\xi_3^*\eta_3+\xi_1^*\eta_1=\xi_1^*\eta_1-i^2\xi_2^*\eta_2+\xi_3^*\eta_3\\&=\xi_1^*\eta_1+\xi_2^*\eta_2+\xi_3^*\eta_3=\langle(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\rangle=\langle v_1|v_2\rangle\end{aligned}$$

Из горњег израза је јасно да је задати оператор заиста *унитаран*.

Матрица којом се дати оператор представља у *апсолутном базису* добија се преко основне формуле репрезентовања

$$\begin{cases}\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle=\hat{A}(1,0,0)=(0,0,-1)=(-1)(0,0,1)=(-1)|\mathrm{e}_3\rangle=0|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+(-1)|\mathrm{e}_3\rangle\\ \hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle=\hat{A}(0,1,0)=(i,0,0)=i(1,0,0)=i|\mathrm{e}_1\rangle=i|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+0|\mathrm{e}_3\rangle\\ \hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle=\hat{A}(0,0,1)=(0,1,0)=|\mathrm{e}_2\rangle=0|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+0|\mathrm{e}_3\rangle\end{cases}$$

тако што се три коефицијента уз $|\mathrm{e}_1\rangle$ напишу у првој врсти матрице, три коефицијента уз $|\mathrm{e}_2\rangle$ у другој и три коефицијента уз $|\mathrm{e}_3\rangle$ у трећој, чиме се добија

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&i&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

Адјунгована матрица овој добија се транспоновањем (врсте се напишу као колоне) и комплексним коњуговањем матричних елемената (наравно, оних који су комплексни бројеви)

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&i&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}^\dagger=\begin{bmatrix}0&i^*&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{tr}}=\begin{bmatrix}0&-i&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{tr}}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\-i&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

Ако је задати оператор унитаран онда, по дефиницији истих, матрични производ горе добијених матрица мора давати матрицу јединичног оператора, и то без обзира на редослед

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&i&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-1\\-i&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i^2&0&0\\0&1^2&0\\0&0&(-1)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\left[\hat{I}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\-i&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&i&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)^2&0&0\\0&-i^2&0\\0&0&1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\left[\hat{I}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

Матрица којом се дати оператор представља у *задатом базису* добија се такође преко основне формуле репрезентовања

$$\hat{A}\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle=\hat{A}(1,1,1)=(i,1,-1)=i\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+1\left|\mathrm{e}_2\right\rangle+(-1)\left|\mathrm{e}_3\right\rangle.$$

Нажалост, ово није основна формула репрезентовања; лик $(i,1,-1)$ добијен деловањем оператора $\hat{A}$ на вектор $\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle$ мора бити написан као линеарна комбинација вектора $\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle$, $\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle$ и $\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle$, не вектора апсолутног базиса $\left|\mathrm{e}_1\right\rangle$, $\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$ и $\left|\mathrm{e}_3\right\rangle$

$$\hat{A}\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle=(i,1,-1)=\alpha\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle+\beta\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle+\gamma\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0)=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta,\alpha).$$

Одавде следи систем од три линеарне једначине

$$\begin{cases}i=\alpha+\beta+\gamma\\1=\alpha+\beta\\-1=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}i=\alpha+\beta+\gamma\\1=\alpha+\beta\\\alpha=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i=-1+\beta+\gamma\\1=-1+\beta\\\alpha=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i+1=\beta+\gamma\\\beta=2\\\alpha=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i+1=2+\gamma\\\beta=2\\\alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=i-1\\\beta=2\\\alpha=-1\end{cases}$$

Значи да основна формула репрезентовања лика првог вектора задатог базиса гласи

$$\hat{A}\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle=-1\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle+2\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle+(i-1)\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle.$$

Поступак се понавља за лик другог вектора задатог базиса

$$\begin{aligned}\hat{A}\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle&=\hat{A}(1,1,0)=(i,0,-1)=i\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+0\left|\mathrm{e}_2\right\rangle+(-1)\left|\mathrm{e}_3\right\rangle\\&=\alpha'\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle+\beta'\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle+\gamma'\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle=\alpha'(1,1,1)+\beta'(1,1,0)+\gamma'(1,0,0)=(\alpha'+\beta'+\gamma',\alpha'+\beta',\alpha')\end{aligned}$$

Одозго следи систем

$$\begin{cases}i=\alpha'+\beta'+\gamma'\\0=\alpha'+\beta'\\-1=\alpha'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}i=\alpha'+\beta'+\gamma'\\0=\alpha'+\beta'\\\alpha'=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i=-1+\beta'+\gamma'\\0=-1+\beta'\\\alpha'=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}i+1=\beta'+\gamma'\\\beta'=1\\\alpha'=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i+1=1+\gamma' \\ \beta'=1 \\ \alpha'=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma'=i \\ \beta'=1 \\ \alpha'=-1 \end{cases}$$

те основна формула репрезентовања лика другог вектора задатог базиса гласи

$$\hat{A}|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle = -1|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle + 1|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle + i|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle.$$

Опет се ради исто за лик трећег вектора задатог базиса

$$\hat{A}|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle = \hat{A}(1,0,0) = (0,0,-1) = 0|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + (-1)|\mathrm{e}_3\rangle$$
$$= \alpha''|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle + \beta''|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle + \gamma''|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle = \alpha''(1,1,1) + \beta''(1,1,0) + \gamma''(1,0,0) = (\alpha''+\beta''+\gamma'', \alpha''+\beta'', \alpha'')$$

Одозго следи систем

$$\begin{cases} 0=\alpha''+\beta''+\gamma'' \\ 0=\alpha''+\beta'' \\ -1=\alpha'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=\alpha''+\beta''+\gamma'' \\ 0=\alpha''+\beta'' \\ \alpha''=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=-1+\beta''+\gamma'' \\ 0=-1+\beta'' \\ \alpha''=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\beta''+\gamma'' \\ \beta''=1 \\ \alpha''=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=1+\gamma'' \\ \beta''=1 \\ \alpha''=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma''=0 \\ \beta''=1 \\ \alpha''=-1 \end{cases}$$

стога основна формула репрезентовања лика трећег вектора задатог базиса има облик

$$\hat{A}|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle = -1|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle + 1|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle + 0|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle.$$

Матрица датог оператора у задатом базису може се написати на основу три добијене формуле репрезентовања као

$$\begin{cases} \hat{A}|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle = -1|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle + 2|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle + (i-1)|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle \\ \hat{A}|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle = -1|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle + 1|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle + i|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle \\ \hat{A}|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle = -1|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle + 1|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle + 0|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle \end{cases} \Rightarrow \left[\hat{A}\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ i-1 & i & 0 \end{bmatrix}.$$

Сада треба добити матрицу адјунгованог (тј. инверзног) оператора у истом базису. Према основној формули репрезентовања, лик првог вектора датог базиса пише се као линеарна комбинација вектора $|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle$, $|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle$ и $|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle$

$$\hat{A}^\dagger|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle = \alpha|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle + \beta|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle + \gamma|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle$$

што се матрично пише као

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \alpha\left[|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} + \beta\left[|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} + \gamma\left[|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

илити

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha+\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-1 \\ \alpha+\beta=-i \\ \alpha=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\beta+\gamma=-1 \\ 1+\beta=-i \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta+\gamma=-2 \\ \beta=-i-1 \\ \alpha=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -i-1+\gamma=-2 \\ \beta=-i-1 \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=i-1 \\ \beta=-i-1 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

на основу чега се лик првог вектора задатог базиса записује као

$$\hat{A}^\dagger |\overline{\mathrm{e}}_1\rangle = 1|\overline{\mathrm{e}}_1\rangle + (-i-1)|\overline{\mathrm{e}}_2\rangle + (i-1)|\overline{\mathrm{e}}_3\rangle .$$

Опет на основу основне формуле репрезентовања, лик другог вектора датог базиса је линеарна комбинација вектора $|\overline{\mathrm{e}}_1\rangle$, $|\overline{\mathrm{e}}_2\rangle$ и $|\overline{\mathrm{e}}_3\rangle$

$$\hat{A}^\dagger |\overline{\mathrm{e}}_2\rangle = \alpha' |\overline{\mathrm{e}}_1\rangle + \beta' |\overline{\mathrm{e}}_2\rangle + \gamma' |\overline{\mathrm{e}}_3\rangle$$

што се матрично пише као

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \left[|\overline{\mathrm{e}}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \alpha' \left[|\overline{\mathrm{e}}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} + \beta' \left[|\overline{\mathrm{e}}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} + \gamma' \left[|\overline{\mathrm{e}}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

то јест

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'+\beta'+\gamma' \\ \alpha'+\beta' \\ \alpha' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha'+\beta'+\gamma'=0 \\ \alpha'+\beta'=-i \\ \alpha'=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\beta'+\gamma'=0 \\ 1+\beta'=-i \\ \alpha'=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta'+\gamma'=-1 \\ \beta'=-i-1 \\ \alpha'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -i-1+\gamma'=-1 \\ \beta'=-i-1 \\ \alpha'=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma'=i \\ \beta'=-i-1 \\ \alpha'=1 \end{cases}$$

те се лик другог вектора задатог базиса записује као

$$\hat{A}^\dagger |\overline{\mathrm{e}}_2\rangle = 1|\overline{\mathrm{e}}_1\rangle + (-i-1)|\overline{\mathrm{e}}_2\rangle + i|\overline{\mathrm{e}}_3\rangle .$$

И коначно, на основу основне формуле репрезентовања, лик трећег вектора датог базиса биће линеарна комбинација вектора $|\overline{\mathrm{e}}_1\rangle$, $|\overline{\mathrm{e}}_2\rangle$ и $|\overline{\mathrm{e}}_3\rangle$

$$\hat{A}^\dagger |\overline{\mathrm{e}}_3\rangle = \alpha'' |\overline{\mathrm{e}}_1\rangle + \beta'' |\overline{\mathrm{e}}_2\rangle + \gamma'' |\overline{\mathrm{e}}_3\rangle$$

или, у матричном запису

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \left[|\overline{\mathrm{e}}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \alpha'' \left[|\overline{\mathrm{e}}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} + \beta'' \left[|\overline{\mathrm{e}}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} + \gamma'' \left[|\overline{\mathrm{e}}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

односно

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha''\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta''\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma''\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha''+\beta''+\gamma'' \\ \alpha''+\beta'' \\ \alpha'' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha''+\beta''+\gamma''=0 \\ \alpha''+\beta''=-i \\ \alpha''=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta''+\gamma''=0 \\ \beta''=-i \\ \alpha''=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -i+\gamma''=0 \\ \beta''=-i \\ \alpha''=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma''=i \\ \beta''=-i \\ \alpha''=0 \end{cases}$$

те лик трећег вектора задатог базиса гласи

$$\hat{A}^\dagger \left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle = 0\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle + (-i)\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle + i\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle .$$

Матрица адјунгованог оператора у задатом базису пише се према три добијене формуле репрезентовања на следећи начин

$$\begin{cases} \hat{A}^\dagger \left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle = 1\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle + (-i-1)\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle + (i-1)\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle \\ \hat{A}^\dagger \left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle = 1\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle + (-i-1)\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle + i\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle \\ \hat{A}^\dagger \left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle = 0\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle + (-i)\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle + i\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle \end{cases} \Rightarrow \left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i-1 & -i-1 & -i \\ i-1 & i & i \end{bmatrix}.$$

Будући да је задати оператор унитаран независно од базиса, по дефиницији унитарних оператора матрични производ горе добијених матрица мора бити једнак матрици јединичног оператора без обзира на редослед

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}} \left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ i-1 & i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i-1 & -i-1 & -i \\ i-1 & i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+i+1-i+1 & -1+i+1-i & i-i \\ 2-i-1+i-1 & 2-i-1+i & -i+i \\ i-1-i^2-i & i-1-i^2-i & -i^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\hat{I}\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{A}^\dagger\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}} \left[\hat{A}\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i-1 & -i-1 & -i \\ i-1 & i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ i-1 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+2 & -1+1 & -1+1 \\ i+1-2i-2-i^2+i & i+1-i-1-i^2 & i+1-i-1 \\ -i+1+2i+i^2-i & -i+1+i+i^2 & -i+1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\hat{I}\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}}$$

(б) Унитарност задатог оператора

$$\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \left(\frac{\xi_2+\xi_3}{\sqrt{2}}, \frac{\xi_2-\xi_3}{\sqrt{2}}, i\xi_1\right)$$

проверава се образовањем следећег скаларног производа

$$\left\langle \hat{B}v_1 \middle| \hat{B}v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \middle| \hat{B}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\xi_2+\xi_3}{\sqrt{2}}, \frac{\xi_2-\xi_3}{\sqrt{2}}, i\xi_1 \right) \middle| \left(\frac{\eta_2+\eta_3}{\sqrt{2}}, \frac{\eta_2-\eta_3}{\sqrt{2}}, i\eta_1 \right) \right\rangle$$
$$= \left(\frac{\xi_2+\xi_3}{\sqrt{2}} \right)^* \frac{\eta_2+\eta_3}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\xi_2-\xi_3}{\sqrt{2}} \right)^* \frac{\eta_2-\eta_3}{\sqrt{2}} + (i\xi_1)^* i\eta_1$$
$$= \frac{(\xi_2^*+\xi_3^*)(\eta_2+\eta_3)}{2} + \frac{(\xi_2^*-\xi_3^*)(\eta_2-\eta_3)}{2} - i\xi_1^* i\eta_1$$
$$= \frac{\xi_2^*\eta_2+\xi_3^*\eta_2+\xi_2^*\eta_3+\xi_3^*\eta_3+\xi_2^*\eta_2-\xi_3^*\eta_2-\xi_2^*\eta_3+\xi_3^*\eta_3}{2} - i^2\xi_1^*\eta_1$$
$$= \frac{2\xi_2^*\eta_2+2\xi_3^*\eta_3}{2} + \xi_1^*\eta_1 = \xi_1^*\eta_1+\xi_2^*\eta_2+\xi_3^*\eta_3 = \left\langle (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \middle| (\eta_1,\eta_2,\eta_3) \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle$$

Очигледно је да је задати оператор стварно *унитаран*.

Матрица којом се дати оператор представља у *апсолутном базису* добија се деловањем на векторе тог базиса, те коришћењем основне формуле репрезентовања

$$\begin{cases} \hat{B}|\mathrm{e}_1\rangle = \hat{B}(1,0,0) = (0,0,i) = i(0,0,1) = (-1)|\mathrm{e}_3\rangle = 0|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + i|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{B}|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{B}(0,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle \\ \hat{B}|\mathrm{e}_3\rangle = \hat{B}(0,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle \end{cases}$$

Наравно, три коефицијента уз $|\mathrm{e}_1\rangle$ сместе се у прву врсту матрице, три коефицијента уз $|\mathrm{e}_2\rangle$ у другу а три коефицијента уз $|\mathrm{e}_3\rangle$ у трећу, што даје

$$\left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ i\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Адјунгована матрица овој добија се транспоновањем (врсте се пишу као колоне) и комплексним коњуговањем матричних елемената (само оних који су комплексни бројеви)

$$\left[\hat{B}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ i\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ i^*\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{tr}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -i\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{tr}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Како је задати оператор унитаран онда, по дефиницији истих, матрични производ горе добијених матрица мора давати матрицу јединичног оператора, и то без обзира на редослед

$$\left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\hat{B}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&-1\\i\sqrt{2}&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&-i\sqrt{2}\\1&1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-i^2 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\left[\hat{I}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{B}^\dagger\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&-i\sqrt{2}\\1&1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&-1\\i\sqrt{2}&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-i^2 2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\left[\hat{I}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

Матрица којом се дати оператор представља у *задатом базису* добија се деловањем на векторе апсолутног базиса, наравно, почиње се са првим

$$\hat{B}|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle=\hat{A}(1,1,1)=\left(\frac{1+1}{\sqrt{2}},\frac{1-1}{\sqrt{2}},i\right)=(\sqrt{2},0,i)=\sqrt{2}|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+i|\mathrm{e}_3\rangle .$$

Међутим, ово није у складу с основном формулом репрезентовања; лик $(\sqrt{2},0,i)$ добијен деловањем оператора $\hat{B}$ на вектор $|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle$ мора се написати као линеарна комбинација вектора $|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle$, $|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle$ и $|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle$, не вектора апсолутног базиса $|\mathrm{e}_1\rangle$, $|\mathrm{e}_2\rangle$ и $|\mathrm{e}_3\rangle$

$$\hat{B}|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle=(\sqrt{2},0,i)=\alpha|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle+\beta|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle+\gamma|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0)=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta,\alpha) .$$

Одавде следи систем од три линеарне једначине

$$\begin{cases}\sqrt{2}=\alpha+\beta+\gamma\\0=\alpha+\beta\\i=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2}=\alpha+\beta+\gamma\\0=\alpha+\beta\\\alpha=i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}=i+\beta+\gamma\\0=i+\beta\\\alpha=i\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2}-i=\beta+\gamma\\\beta=-i\\\alpha=i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}-i=-i+\gamma\\\beta=-i\\\alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=\sqrt{2}\\\beta=-i\\\alpha=i\end{cases}$$

Даклем, основна формула репрезентовања лика првог вектора задатог базиса гласи

$$\hat{B}|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle=i|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle+(-i)|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle+\sqrt{2}|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle .$$

Поступак се понавља за лик другог вектора задатог базиса

$$\hat{B}|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle=\hat{B}(1,1,0)=\left(\frac{1+0}{\sqrt{2}},\frac{1-0}{\sqrt{2}},i\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_1\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_2\rangle+i|\mathrm{e}_3\rangle$$

$$=\alpha'|\bar{\mathrm{e}}_1\rangle+\beta'|\bar{\mathrm{e}}_2\rangle+\gamma'|\bar{\mathrm{e}}_3\rangle=\alpha'(1,1,1)+\beta'(1,1,0)+\gamma'(1,0,0)=(\alpha'+\beta'+\gamma',\alpha'+\beta',\alpha')$$

Одозго следи систем

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}=\alpha'+\beta'+\gamma'\\ \frac{1}{\sqrt{2}}=\alpha'+\beta'\\ i=\alpha'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}=\alpha'+\beta'+\gamma'\\ \frac{1}{\sqrt{2}}=\alpha'+\beta'\\ \alpha'=i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}=i+\beta'+\gamma'\\ \frac{1}{\sqrt{2}}=i+\beta'\\ \alpha'=i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}-i=\beta'+\gamma'\\ \beta'=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\\ \alpha'=i\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}-i=\frac{1}{\sqrt{2}}-i+\gamma'\\ \beta'=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\\ \alpha'=i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma'=\frac{1}{\sqrt{2}}-i-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\\ \beta'=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\\ \alpha'=i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma'=0\\ \beta'=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\\ \alpha'=i\end{cases}$$

те основна формула репрезентовања лика другог вектора задатог базиса гласи

$$\hat{B}|\bar{e}_2\rangle=i|\bar{e}_1\rangle+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\right)|\bar{e}_2\rangle+0|\bar{e}_3\rangle.$$

Поступак се понавља за за лик трећег вектора задатог базиса

$$\hat{B}|\bar{e}_3\rangle=\hat{B}(1,0,0)=\left(\frac{0+0}{\sqrt{2}},\frac{0-0}{\sqrt{2}},i\right)=0|e_1\rangle+0|e_2\rangle+i|e_3\rangle$$
$$=\alpha''|\bar{e}_1\rangle+\beta''|\bar{e}_2\rangle+\gamma''|\bar{e}_3\rangle=\alpha''(1,1,1)+\beta''(1,1,0)+\gamma''(1,0,0)=(\alpha''+\beta''+\gamma'',\alpha''+\beta'',\alpha'')$$

Одозго следи систем

$$\begin{cases}0=\alpha''+\beta''+\gamma''\\ 0=\alpha''+\beta''\\ i=\alpha''\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=\alpha''+\beta''+\gamma''\\ 0=\alpha''+\beta''\\ \alpha''=i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=i+\beta''+\gamma''\\ 0=i+\beta''\\ \alpha''=i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-i=\beta''+\gamma''\\ \beta''=-i\\ \alpha''=i\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-i=-i+\gamma''\\ \beta''=-i\\ \alpha''=i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma''=0\\ \beta''=-i\\ \alpha''=i\end{cases}$$

стога основна формула репрезентовања лика трећег вектора задатог базиса има облик

$$\hat{B}|\bar{e}_3\rangle=i|\bar{e}_1\rangle+(-i)|\bar{e}_2\rangle+0|\bar{e}_3\rangle.$$

Матрица датог оператора у задатом базису може се написати на основу три добијене формуле репрезентовања као

$$\begin{cases}\hat{B}|\bar{e}_1\rangle=i|\bar{e}_1\rangle+(-i)|\bar{e}_2\rangle+\sqrt{2}|\bar{e}_3\rangle\\ \hat{B}|\bar{e}_2\rangle=i|\bar{e}_1\rangle+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\right)|\bar{e}_2\rangle+0|\bar{e}_3\rangle\\ \hat{B}|\bar{e}_3\rangle=i|\bar{e}_1\rangle+(-i)|\bar{e}_2\rangle+0|\bar{e}_3\rangle\end{cases}\Rightarrow\left[\hat{B}\right]_{\{|\bar{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}i & i & i\\ -i & \frac{1}{\sqrt{2}}-i & -i\\ \sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Преостало је да се одреди матрица адјунгованог (тј. инверзног) оператора у истом базису. Према основној формули репрезентовања, лик првог вектора задатог базиса записује се као линеарна комбинација вектора $|\overline{e}_1\rangle$, $|\overline{e}_2\rangle$ и $|\overline{e}_3\rangle$

$$\hat{B}^\dagger|\overline{e}_1\rangle = \alpha|\overline{e}_1\rangle + \beta|\overline{e}_2\rangle + \gamma|\overline{e}_3\rangle$$

или, матрично

$$\left[\hat{B}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[|\overline{e}_1\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \alpha\left[|\overline{e}_1\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} + \beta\left[|\overline{e}_2\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} + \gamma\left[|\overline{e}_3\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}}$$

те у развијеном облику

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha+\beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -i \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha+\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -i \\ \alpha+\beta = \sqrt{2} \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta+\gamma = -i \\ \beta = \sqrt{2} \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}+\gamma = -i \\ \beta = \sqrt{2} \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -i-\sqrt{2} \\ \beta = \sqrt{2} \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

на основу чега се лик првог вектора задатог базиса записује као

$$\hat{B}^\dagger|\overline{e}_1\rangle = 0|\overline{e}_1\rangle + \sqrt{2}|\overline{e}_2\rangle + (-i-\sqrt{2})|\overline{e}_3\rangle .$$

Опет, лик другог вектора датог базиса линеарна је комбинација вектора $|\overline{e}_1\rangle$, $|\overline{e}_2\rangle$ и $|\overline{e}_3\rangle$

$$\hat{B}^\dagger|\overline{e}_2\rangle = \alpha'|\overline{e}_1\rangle + \beta'|\overline{e}_2\rangle + \gamma'|\overline{e}_3\rangle$$

што се матрично пише као

$$\left[\hat{B}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[|\overline{e}_2\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \alpha'\left[|\overline{e}_1\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} + \beta'\left[|\overline{e}_2\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}} + \gamma'\left[|\overline{e}_3\rangle\right]_{\{|e_i\rangle\}}$$

то јест

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma'\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'+\beta'+\gamma' \\ \alpha'+\beta' \\ \alpha' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha'+\beta'+\gamma' = 0 \\ \alpha'+\beta' = \sqrt{2} \\ \alpha' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta'+\gamma' = 0 \\ \beta' = \sqrt{2} \\ \alpha' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}+\gamma' = 0 \\ \beta' = \sqrt{2} \\ \alpha' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma' = -\sqrt{2} \\ \beta' = \sqrt{2} \\ \alpha' = 0 \end{cases}$$

те се лик другог вектора задатог базиса записује као

$$\hat{B}^\dagger|\overline{e}_2\rangle = 0|\overline{e}_1\rangle + \sqrt{2}|\overline{e}_2\rangle - \sqrt{2}|\overline{e}_3\rangle .$$

На крају, према основној формули репрезентовања, лик трећег вектора датог базиса биће линеарна комбинација вектора $|\overline{e}_1\rangle$, $|\overline{e}_2\rangle$ и $|\overline{e}_3\rangle$

$$\hat{B}^{\dagger}\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle=\alpha''\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle+\beta''\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle+\gamma''\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle$$

или, у матричном запису

$$\left[\hat{B}^{\dagger}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\alpha''\left[\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}+\beta''\left[\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}+\gamma''\left[\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

односно

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 0 & -i\sqrt{2}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\alpha''\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\beta''\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\gamma''\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha''+\beta''+\gamma''\\ \alpha''+\beta''\\ \alpha''\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha''+\beta''+\gamma''=0\\ \alpha''+\beta''=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \alpha''=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\beta''+\gamma''=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\beta''=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \alpha''=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\gamma''=0\\ \beta''=0\\ \alpha''=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma''=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \beta''=0\\ \alpha''=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

те лик трећег вектора задатог базиса гласи

$$\hat{B}^{\dagger}\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle+0\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle.$$

Матрица адјунгованог оператора у задатом базису пише се према три добијене формуле репрезентовања на следећи начин

$$\begin{cases}\hat{B}^{\dagger}\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle=0\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle+\sqrt{2}\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle+(-i-\sqrt{2})\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle\\ \hat{B}^{\dagger}\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle=0\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle+\sqrt{2}\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle-\sqrt{2}\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle\\ \hat{B}^{\dagger}\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|\bar{\mathrm{e}}_1\right\rangle+0\left|\bar{\mathrm{e}}_2\right\rangle-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|\bar{\mathrm{e}}_3\right\rangle\end{cases}\Rightarrow\left[\hat{B}^{\dagger}\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\\ -i-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

односно, мало лепше

$$\left[\hat{B}^{\dagger}\right]_{\{|\bar{\mathrm{e}}_i\rangle\}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ -i\sqrt{2}-2 & -2 & -1\end{bmatrix}.$$

Пошто је задати оператор унитаран независно од базиса, по дефиницији унитарних оператора матрични производ горе добијених матрица мора бити једнак матрици јединичног оператора без обзира на редослед

$$\left[\hat{B}\right]_{\{|\bar{e}_i\rangle\}}\left[\hat{B}^\dagger\right]_{\{|\bar{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} i & i & i \\ -i & \frac{1}{\sqrt{2}}-i & -i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -i\sqrt{2}-2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2i-i^2\sqrt{2}-2i & 2i-2i & i-i \\ \frac{2}{\sqrt{2}}-2i+i^2\sqrt{2}+2i & \frac{2}{\sqrt{2}}-2i+2i & -i+i \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\left[\hat{I}\right]_{\{|\bar{e}_i\rangle\}}$$

$$\left[\hat{B}^\dagger\right]_{\{|\bar{e}_i\rangle\}}\left[\hat{B}\right]_{\{|\bar{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -i\sqrt{2}-2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & i & i \\ -i & \frac{1}{\sqrt{2}}-i & -i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2i-2i & 2i+\frac{2}{\sqrt{2}}-2i & 2i-2i \\ -i^2\sqrt{2}-2i+2i-\sqrt{2} & -i^2\sqrt{2}-2i-\frac{2}{\sqrt{2}}+2i & -i^2\sqrt{2}-2i+2i \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\left[\hat{I}\right]_{\{|\bar{e}_i\rangle\}}$$

(в) Унитарност задатог оператора $\hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_2,\xi_1,\xi_1)$ проверава се следећим скаларним производом

$$\left\langle \hat{C}v_1 \middle| \hat{C}v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{C}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \middle| \hat{C}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \right\rangle = \left\langle (\xi_2,\xi_1,\xi_1) \middle| (\eta_2,\eta_1,\eta_1) \right\rangle = \xi_2^*\eta_2+\xi_1^*\eta_1+\xi_1^*\eta_1$$
$$=2\xi_1^*\eta_1+\xi_2^*\eta_2 \neq \xi_1^*\eta_1+\xi_2^*\eta_2+\xi_3^*\eta_3 = \left\langle (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \middle| (\eta_1,\eta_2,\eta_3) \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle$$

те, пошто је

$$\left\langle \hat{C}v_1 \middle| \hat{C}v_2 \right\rangle \neq \left\langle v_1 \middle| v_2 \right\rangle,$$

задати оператор очигледно *није унитаран*.

(8.5) Да ли је оператор $\hat{O}$ из простора $\mathbb{R}^4$ са стандардно дефинисаним скаларним производом, а који обавља следећа пресликавања ниже датих вектора

$$
\begin{aligned}
(2,2,2,2) &\xrightarrow{\hat{O}} (4,0,0,0)\\
(2,0,2,2) &\xrightarrow{\hat{O}} (3,-1,1,1)\\
(2,2,0,2) &\xrightarrow{\hat{O}} (3,1,-1,1)\\
(2,2,2,0) &\xrightarrow{\hat{O}} (3,1,1,-1)
\end{aligned}
$$

ортогоналан? Одредити матрицу којом се овај оператор представља у апсолутном базису.

Прво треба ортонормирати горе дате *објекте* пресликавања. Нормира се, наравно, први

$$
|o_1\rangle^{\mathrm{n}} = \frac{|o_1\rangle}{\left\||o_1\rangle\right\|} = \frac{|o_1\rangle}{\sqrt{\langle o_1|o_1\rangle}} = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{\langle(2,2,2,2)|(2,2,2,2)\rangle}} = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{2^2+2^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{16}}2(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,1,1)
$$

затим се ортонормира други (у односу на први)

$$
|o_2\rangle^{\mathrm{on}} = \frac{|o_2\rangle - {}^{\mathrm{n}}\langle o_1|o_2\rangle|o_1\rangle^{\mathrm{n}}}{\left\||o_2\rangle - {}^{\mathrm{n}}\langle o_1|o_2\rangle|o_1\rangle^{\mathrm{n}}\right\|} = \frac{(2,0,2,2)-\left\langle\frac{1}{2}(1,1,1,1)\middle|(2,0,2,2)\right\rangle\frac{1}{2}(1,1,1,1)}{\left\|(2,0,2,2)-\left\langle\frac{1}{2}(1,1,1,1)\middle|(2,0,2,2)\right\rangle\frac{1}{2}(1,1,1,1)\right\|}
$$

$$
= \frac{(2,0,2,2)-\frac{1}{4}\langle(1,1,1,1)|(2,0,2,2)\rangle(1,1,1,1)}{\left\|(2,0,2,2)-\frac{1}{4}\langle(1,1,1,1)|(2,0,2,2)\rangle(1,1,1,1)\right\|} = \frac{(2,0,2,2)-\frac{6}{4}(1,1,1,1)}{\left\|(2,0,2,2)-\frac{6}{4}(1,1,1,1)\right\|}
$$

$$
= \frac{(2,0,2,2)-\frac{3}{2}(1,1,1,1)}{\left\|(2,0,2,2)-\frac{3}{2}(1,1,1,1)\right\|} = \frac{\left(\frac{4}{2},\frac{0}{2},\frac{4}{2},\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{4}{2},\frac{0}{2},\frac{4}{2},\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|}
$$

$$
= \frac{\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{12}}\frac{1}{2}(1,-3,1,1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1)
$$

потом трећи (у односу на прва два)

$$
|o_3\rangle^{\mathrm{on}} = \frac{|o_3\rangle - {}^{\mathrm{n}}\langle o_1|o_3\rangle|o_1\rangle^{\mathrm{n}} - {}^{\mathrm{on}}\langle o_2|o_3\rangle|o_2\rangle^{\mathrm{on}}}{\left\||o_3\rangle - {}^{\mathrm{n}}\langle o_1|o_3\rangle|o_1\rangle^{\mathrm{n}} - {}^{\mathrm{on}}\langle o_2|o_3\rangle|o_2\rangle^{\mathrm{on}}\right\|}
$$

$$
= \frac{(2,2,0,2)-\left\langle\frac{1}{2}(1,1,1,1)\middle|(2,2,0,2)\right\rangle\frac{1}{2}(1,1,1,1)-\left\langle\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1)\middle|(2,2,0,2)\right\rangle\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1)}{\left\|(2,2,0,2)-\left\langle\frac{1}{2}(1,1,1,1)\middle|(2,2,0,2)\right\rangle\frac{1}{2}(1,1,1,1)-\left\langle\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1)\middle|(2,2,0,2)\right\rangle\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1)\right\|}
$$

односно

$$\left|o_3\right\rangle^{\text{on}} = \frac{(2,2,0,2) - \frac{1}{4}\left\langle (1,1,1,1) \middle| (2,2,0,2)\right\rangle (1,1,1,1) - \frac{1}{12}\left\langle (1,-3,1,1) \middle| (2,2,0,2)\right\rangle (1,-3,1,1)}{\left\| (2,2,0,2) - \frac{1}{4}\left\langle (1,1,1,1) \middle| (2,2,0,2)\right\rangle (1,1,1,1) - \frac{1}{12}\left\langle (1,-3,1,1) \middle| (2,2,0,2)\right\rangle (1,-3,1,1) \right\|}$$

$$= \frac{(2,2,0,2) - \frac{6}{4}(1,1,1,1) + \frac{2}{12}(1,-3,1,1)}{\left\|(2,2,0,2) - \frac{6}{4}(1,1,1,1) + \frac{2}{12}(1,-3,1,1)\right\|} = \frac{(2,2,0,2) - \frac{3}{2}(1,1,1,1) + \frac{1}{6}(1,-3,1,1)}{\left\|(2,2,0,2) - \frac{3}{2}(1,1,1,1) + \frac{1}{6}(1,-3,1,1)\right\|}$$

$$= \frac{\frac{6}{6}(2,2,0,2) - \frac{9}{6}(1,1,1,1) + \frac{1}{6}(1,-3,1,1)}{\left\|\frac{6}{6}(2,2,0,2) - \frac{9}{6}(1,1,1,1) + \frac{1}{6}(1,-3,1,1)\right\|} = \frac{\left(\frac{12}{6},\frac{12}{6},0,\frac{12}{6}\right) - \left(\frac{9}{6},\frac{9}{6},\frac{9}{6},\frac{9}{6}\right) + \left(\frac{1}{6},-\frac{3}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{12}{6},\frac{12}{6},0,\frac{12}{6}\right) - \left(\frac{9}{6},\frac{9}{6},\frac{9}{6},\frac{9}{6}\right) + \left(\frac{1}{6},-\frac{3}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(\frac{12-9+1}{6},\frac{12-9-3}{6},\frac{-9+1}{6},\frac{12-9+1}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{12-9+1}{6},\frac{12-9-3}{6},\frac{-9+1}{6},\frac{12-9+1}{6}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{4}{6},0,-\frac{8}{6},\frac{4}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{4}{6},0,\frac{-8}{6},\frac{4}{6}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{6}}\frac{2}{3}(1,0,-2,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-2,1)$$

а потом и четврти (у односу на прва три)

$$\left|o_4\right\rangle^{\text{on}} = \frac{\left|o_4\right\rangle - {}^{\text{n}}\!\left\langle o_1 \middle| o_4\right\rangle \left|o_1\right\rangle^{\text{n}} - {}^{\text{on}}\!\left\langle o_2 \middle| o_4\right\rangle \left|o_2\right\rangle^{\text{on}} - {}^{\text{on}}\!\left\langle o_3 \middle| o_4\right\rangle \left|o_3\right\rangle^{\text{on}}}{\left\|\left|o_4\right\rangle - {}^{\text{n}}\!\left\langle o_1 \middle| o_4\right\rangle \left|o_1\right\rangle^{\text{n}} - {}^{\text{on}}\!\left\langle o_2 \middle| o_4\right\rangle \left|o_2\right\rangle^{\text{on}} - {}^{\text{on}}\!\left\langle o_3 \middle| o_4\right\rangle \left|o_3\right\rangle^{\text{on}}\right\|}$$

$$= \frac{(2,2,2,0) - \left\langle \frac{1}{2}(1,1,1,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle \frac{1}{2}(1,1,1,1) - \left\langle \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-2,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-2,1)}{\left\|(2,2,2,0) - \left\langle \frac{1}{2}(1,1,1,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle \frac{1}{2}(1,1,1,1) - \left\langle \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-2,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-2,1)\right\|}$$

$$= \frac{(2,2,2,0) - \frac{1}{4}\left\langle (1,1,1,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle (1,1,1,1) - \frac{1}{12}\left\langle (1,-3,1,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle (1,-3,1,1) - \frac{1}{6}\left\langle (1,0,-2,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle (1,0,-2,1)}{\left\|(2,2,2,0) - \frac{1}{4}\left\langle (1,1,1,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle (1,1,1,1) - \frac{1}{12}\left\langle (1,-3,1,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle (1,-3,1,1) - \frac{1}{6}\left\langle (1,0,-2,1) \middle| (2,2,2,0)\right\rangle (1,0,-2,1)\right\|}$$

$$= \frac{(2,2,2,0) - \frac{6}{4}(1,1,1,1) + \frac{2}{12}(1,-3,1,1) + \frac{2}{6}(1,0,-2,1)}{\left\|(2,2,2,0) - \frac{6}{4}(1,1,1,1) + \frac{2}{12}(1,-3,1,1) + \frac{2}{6}(1,0,-2,1)\right\|} = \frac{(2,2,2,0) - \frac{3}{2}(1,1,1,1) + \frac{1}{6}(1,-3,1,1) + \frac{1}{3}(1,0,-2,1)}{\left\|(2,2,2,0) - \frac{3}{2}(1,1,1,1) + \frac{1}{6}(1,-3,1,1) + \frac{1}{3}(1,0,-2,1)\right\|}$$

$$= \frac{\frac{6}{6}(2,2,2,0) - \frac{9}{6}(1,1,1,1) + \frac{1}{6}(1,-3,1,1) + \frac{2}{6}(1,0,-2,1)}{\left\|\frac{6}{6}(2,2,2,0) - \frac{9}{6}(1,1,1,1) + \frac{1}{6}(1,-3,1,1) + \frac{2}{6}(1,0,-2,1)\right\|}$$

$$= \frac{\left(\frac{12}{6},\frac{12}{6},\frac{12}{6},0\right) - \left(\frac{9}{6},\frac{9}{6},\frac{9}{6},\frac{9}{6}\right) + \left(\frac{1}{6},-\frac{3}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{6},0,-\frac{4}{6},\frac{2}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{12}{6},\frac{12}{6},\frac{12}{6},0\right) - \left(\frac{9}{6},\frac{9}{6},\frac{9}{6},\frac{9}{6}\right) + \left(\frac{1}{6},-\frac{3}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{6},0,-\frac{4}{6},\frac{2}{6}\right)\right\|}$$

то јест

$$|o_4\rangle^{\text{on}} = \frac{\left(\frac{12-9+1+2}{6}, \frac{12-9-3}{6}, \frac{12-9+1-4}{6}, \frac{-9+1+2}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{12-9+1+2}{6}, \frac{12-9-3}{6}, \frac{12-9+1-4}{6}, \frac{-9+1+2}{6}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{6}{6}, 0, 0, \frac{-6}{6}\right)}{\left\|\left(\frac{6}{6}, 0, 0, \frac{-6}{6}\right)\right\|}$$

$$= \frac{(1,0,0,-1)}{\sqrt{1^2+0^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)$$

Сада се ортонормирају *ликови* задатог пресликавања. Почиње се са нормирањем првог

$$|l_1\rangle^{\text{n}} = \frac{|l_1\rangle}{\||l_1\rangle\|} = \frac{|l_1\rangle}{\sqrt{\langle l_1|l_1\rangle}} = \frac{(4,0,0,0)}{\sqrt{\langle(4,0,0,0)|(4,0,0,0)\rangle}} = \frac{(4,0,0,0)}{\sqrt{4^2+0^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{16}}4(1,0,0,0) = (1,0,0,0)$$

потом се ортонормира други (у односу на први)

$$|l_2\rangle^{\text{n}} = \frac{|l_2\rangle - {}^{\text{n}}\langle l_1|l_2\rangle|l_1\rangle^{\text{n}}}{\left\||l_2\rangle - {}^{\text{n}}\langle l_1|l_2\rangle|l_1\rangle^{\text{n}}\right\|} = \frac{(3,-1,1,1)-\langle(1,0,0,0)|(3,-1,1,1)\rangle(1,0,0,0)}{\|(3,-1,1,1)-\langle(1,0,0,0)|(3,-1,1,1)\rangle(1,0,0,0)\|}$$

$$= \frac{(3,-1,1,1)-3(1,0,0,0)}{\|(3,-1,1,1)-3(1,0,0,0)\|} = \frac{(3,-1,1,1)-(3,0,0,0)}{\|(3,-1,1,1)-(3,0,0,0)\|} = \frac{(0,-1,1,1)}{\|(0,-1,1,1)\|}$$

$$= \frac{(0,-1,1,1)}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1)$$

а затим трећи (у односу на прва два)

$$|l_3\rangle^{\text{on}} = \frac{|l_3\rangle - {}^{\text{n}}\langle l_1|l_3\rangle|l_1\rangle^{\text{n}} - {}^{\text{on}}\langle l_2|l_3\rangle|l_2\rangle^{\text{on}}}{\left\||l_3\rangle - {}^{\text{n}}\langle l_1|l_3\rangle|l_1\rangle^{\text{n}} - {}^{\text{on}}\langle l_2|l_3\rangle|l_2\rangle^{\text{on}}\right\|}$$

$$= \frac{(3,1,-1,1)-\langle(1,0,0,0)|(3,1,-1,1)\rangle(1,0,0,0)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1)\middle|(3,1,-1,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1)}{\left\|(3,1,-1,1)-\langle(1,0,0,0)|(3,1,-1,1)\rangle(1,0,0,0)-\left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1)\middle|(3,1,-1,1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1)\right\|}$$

$$= \frac{(3,1,-1,1)-3(1,0,0,0)+\frac{1}{3}(0,-1,1,1)}{\left\|(3,1,-1,1)-3(1,0,0,0)+\frac{1}{3}(0,-1,1,1)\right\|} = \frac{\frac{3}{3}(3,1,-1,1)-\frac{9}{3}(1,0,0,0)+\frac{1}{3}(0,-1,1,1)}{\left\|\frac{3}{3}(3,1,-1,1)-\frac{9}{3}(1,0,0,0)+\frac{1}{3}(0,-1,1,1)\right\|}$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{3},\frac{3}{3},-\frac{3}{3},\frac{3}{3}\right)-\left(\frac{9}{3},0,0,0\right)+\left(0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{9}{3},\frac{3}{3},-\frac{3}{3},\frac{3}{3}\right)-\left(\frac{9}{3},0,0,0\right)+\left(0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{9-9}{3},\frac{3-1}{3},\frac{-3+1}{3},\frac{3+1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{9-9}{3},\frac{3-1}{3},\frac{-3+1}{3},\frac{3+1}{3}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)}{\left\|\left(0,\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{4}{3}\right)\right\|} = \frac{\left(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{3}{2\sqrt{6}}\frac{2}{3}(0,1,-1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,2)$$

а потом и четврти (у односу на прва три)

$$\left|l_4\right\rangle^{\mathrm{on}} = \frac{\left|l_4\right\rangle - {}^{\mathrm{n}}\left\langle l_1\middle|l_4\right\rangle\left|l_1\right\rangle^{\mathrm{n}} - {}^{\mathrm{on}}\left\langle l_2\middle|l_4\right\rangle\left|l_2\right\rangle^{\mathrm{on}} - {}^{\mathrm{on}}\left\langle l_3\middle|l_4\right\rangle\left|l_3\right\rangle^{\mathrm{on}}}{\left\|\left|l_4\right\rangle - {}^{\mathrm{n}}\left\langle l_1\middle|l_4\right\rangle\left|l_1\right\rangle^{\mathrm{n}} - {}^{\mathrm{on}}\left\langle l_2\middle|l_4\right\rangle\left|l_2\right\rangle^{\mathrm{on}} - {}^{\mathrm{on}}\left\langle l_3\middle|l_4\right\rangle\left|l_3\right\rangle^{\mathrm{on}}\right\|}$$

$$= \frac{(3,1,1,-1) - \left\langle(1,0,0,0)\middle|(3,1,1,-1)\right\rangle(1,0,0,0) - \left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1)\middle|(3,1,1,-1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1) - \left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,2)\middle|(3,1,1,-1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,2)}{\left\|(3,1,1,-1) - \left\langle(1,0,0,0)\middle|(3,1,1,-1)\right\rangle(1,0,0,0) - \left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1)\middle|(3,1,1,-1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1) - \left\langle\frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,2)\middle|(3,1,1,-1)\right\rangle\frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,2)\right\|}$$

$$= \frac{(3,1,1,-1) - 3(1,0,0,0) + \frac{1}{3}(0,-1,1,1) + \frac{2}{6}(0,1,-1,2)}{\left\|(3,1,1,-1) - 3(1,0,0,0) + \frac{1}{3}(0,-1,1,1) + \frac{2}{6}(0,1,-1,2)\right\|} = \frac{(3,1,1,-1) - 3(1,0,0,0) + \frac{1}{3}(0,-1,1,1) + \frac{1}{3}(0,1,-1,2)}{\left\|(3,1,1,-1) - 3(1,0,0,0) + \frac{1}{3}(0,-1,1,1) + \frac{1}{3}(0,1,-1,2)\right\|}$$

$$= \frac{\frac{3}{3}(3,1,1,-1) - \frac{9}{3}(1,0,0,0) + \frac{1}{3}(0,-1,1,1) + \frac{1}{3}(0,1,-1,2)}{\left\|\frac{3}{3}(3,1,1,-1) - \frac{9}{3}(1,0,0,0) + \frac{1}{3}(0,-1,1,1) + \frac{1}{3}(0,1,-1,2)\right\|}$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{3},\frac{3}{3},\frac{3}{3},-\frac{3}{3}\right) - \left(\frac{9}{3},0,0,0\right) + \left(0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) + \left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{9}{3},\frac{3}{3},\frac{3}{3},-\frac{3}{3}\right) - \left(\frac{9}{3},0,0,0\right) + \left(0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) + \left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\|}$$

$$= \frac{\left(\frac{9-9}{3},\frac{3-1+1}{3},\frac{3+1-1}{3},\frac{-3+1+2}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{9-9}{3},\frac{3-1+1}{3},\frac{3+1-1}{3},\frac{-3+1+2}{3}\right)\right\|} = \frac{(0,1,1,0)}{\|(0,1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)$$

Сада треба одредити матрицу којом се представља оператор $\hat{O}$ у апсолутном базису, а која врши следећа пресликавања

$$\frac{1}{2}(1,1,1,1) \xrightarrow{\hat{O}} (1,0,0,0)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3,1,1) \xrightarrow{\hat{O}} \frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-2,1) \xrightarrow{\hat{O}} \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,-1,2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1) \xrightarrow{\hat{O}} \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)$$

Почиње се деловањем поменуте матрице на први објекат пресликавања чиме се добија први лик

$$\left|l_1\right\rangle = \hat{O}\left|o_1\right\rangle \longrightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}\\ a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}\\ a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}\\ a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}2 = a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}\\ 0 = a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}\\ 0 = a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}\\ 0 = a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}\end{cases}}$$

Поступак се понавља за други објекат и други лик пресликавања

$$\left|l_2\right\rangle = \hat{O}\left|o_2\right\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow 2\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\-2\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}-3a_{12}+a_{13}+a_{14}\\ a_{21}-3a_{22}+a_{23}+a_{24}\\ a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\ a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}0 = a_{11}-3a_{12}+a_{13}+a_{14}\\ -2 = a_{21}-3a_{22}+a_{23}+a_{24}\\ 2 = a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\ 2 = a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\end{cases}}$$

потом за трећи

$$\left|l_3\right\rangle = \hat{O}\left|o_3\right\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}-2a_{13}+a_{14}\\ a_{21}-2a_{23}+a_{24}\\ a_{31}-2a_{33}+a_{34}\\ a_{41}-2a_{43}+a_{44}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}0 = a_{11}-2a_{13}+a_{14}\\ 1 = a_{21}-2a_{23}+a_{24}\\ -1 = a_{31}-2a_{33}+a_{34}\\ 2 = a_{41}-2a_{43}+a_{44}\end{cases}}$$

и на крају за четврти

$$\left|l_4\right\rangle = \hat{O}\left|o_4\right\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}-a_{14}\\ a_{21}-a_{24}\\ a_{31}-a_{34}\\ a_{41}-a_{44}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}0 = a_{11}-a_{14}\\ 1 = a_{21}-a_{24}\\ 1 = a_{31}-a_{34}\\ 0 = a_{41}-a_{44}\end{cases}}$$

Да би могли да буду одређени матрични елементи прве врсте тражене матрице, формира се нови систем једначина од првих једначина горња четири система

$$\begin{cases} 2 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{11} - 3a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{11} - 2a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{11} - a_{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{11} - 3a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{11} - 2a_{13} + a_{14} \\ a_{11} = a_{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{11} - 3a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{14} - 2a_{13} + a_{14} \\ a_{11} = a_{14} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{11} - 3a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = -2a_{13} + 2a_{14} \\ a_{11} = a_{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{11} - 3a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ a_{13} = a_{14} \\ a_{11} = a_{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = a_{14} - 3a_{12} + a_{14} + a_{14} \\ a_{13} = a_{14} \\ a_{11} = a_{14} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ 0 = -3a_{12} + 3a_{14} \\ a_{13} = a_{14} \\ a_{11} = a_{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ a_{12} = a_{14} \\ a_{13} = a_{14} \\ a_{11} = a_{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4a_{14} \\ a_{12} = a_{14} \\ a_{13} = a_{14} \\ a_{11} = a_{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{14} = 1/2 \\ a_{12} = 1/2 \\ a_{13} = 1/2 \\ a_{11} = 1/2 \end{cases}$$

Матрични елементи друге врсте жељене матрице добијају се из система једначина насталог од других једначина горе наведена четири система

$$\begin{cases} 0 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ -2 = a_{21} - 3a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ 1 = a_{21} - 2a_{23} + a_{24} \\ 1 = a_{21} - a_{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ -2 = a_{21} - 3a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ 1 = a_{21} - 2a_{23} + a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ -2 = a_{21} - 3a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ 1 = 1 + a_{24} - 2a_{23} + a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ -2 = a_{21} - 3a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ 0 = -2a_{23} + 2a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ -2 = a_{21} - 3a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ a_{23} = a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + a_{24} + a_{22} + a_{24} + a_{24} \\ -2 = a_{21} - 3a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ a_{23} = a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 + a_{22} + 3a_{24} \\ -2 = a_{21} - 3a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ a_{23} = a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{22} = -1 - 3a_{24} \\ -2 = a_{21} - 3a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ a_{23} = a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{22} = -1 - 3a_{24} \\ -2 = 1 + a_{24} + 3 + 9a_{24} + a_{24} + a_{24} \\ a_{23} = a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{22} = -1 - 3a_{24} \\ -6 = 12a_{24} \\ a_{23} = a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{22} = -1 - 3a_{24} \\ -1 = 2a_{24} \\ a_{23} = a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{22} = -1 - 3a_{24} \\ a_{24} = -1/2 \\ a_{23} = a_{24} \\ a_{21} = 1 + a_{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{22} = 1/2 \\ a_{24} = -1/2 \\ a_{23} = -1/2 \\ a_{21} = 1/2 \end{cases}$$

За трећу врсту потребне матрице образује се нови систем од трећих једначина горе израчуната четири система

$$\begin{cases}0=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}\\2=a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\-1=a_{31}-2a_{33}+a_{34}\\1=a_{31}-a_{34}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}\\2=a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\-1=a_{31}-2a_{33}+a_{34}\\a_{31}=1+a_{34}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}\\2=a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\-1=1+a_{34}-2a_{33}+a_{34}\\a_{31}=1+a_{34}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}\\2=a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\-2=-2a_{33}+2a_{34}\\a_{31}=1+a_{34}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}\\2=a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\1=a_{33}-a_{34}\\a_{31}=1+a_{34}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}\\2=a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\a_{33}=1+a_{34}\\a_{31}=1+a_{34}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0=1+a_{34}+a_{32}+1+a_{34}+a_{34}\\2=a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\a_{33}=1+a_{34}\\a_{31}=1+a_{34}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{32}=-2-3a_{34}\\2=a_{31}-3a_{32}+a_{33}+a_{34}\\a_{33}=1+a_{34}\\a_{31}=1+a_{34}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_{32}=-2-3a_{34}\\2=1+a_{34}+6+9a_{34}+1+a_{34}+a_{34}\\a_{33}=1+a_{34}\\a_{31}=1+a_{34}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{32}=-2-3a_{34}\\-6=12a_{34}\\a_{33}=1+a_{34}\\a_{31}=1+a_{34}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{32}=-1/2\\a_{34}=-1/2\\a_{33}=1/2\\a_{31}=1/2\end{cases}$$

На крају се формира нови систем од четвртих једначина горе добијена четири система

$$\begin{cases}0=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=a_{41}-2a_{43}+a_{44}\\0=a_{41}-a_{44}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=a_{41}-2a_{43}+a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=a_{44}-2a_{43}+a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=-2a_{43}+2a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\\1=-a_{43}+a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}\\2=a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\\a_{43}=-1+a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0=a_{44}+a_{42}-1+a_{44}+a_{44}\\2=a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\\a_{43}=-1+a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=-1+a_{42}+3a_{44}\\2=a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\\a_{43}=-1+a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{42}=1-3a_{44}\\2=a_{41}-3a_{42}+a_{43}+a_{44}\\a_{43}=-1+a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{42}=1-3a_{44}\\2=a_{44}-3+9a_{44}-1+a_{44}+a_{44}\\a_{43}=-1+a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{42}=1-3a_{44}\\6=12a_{44}\\a_{43}=-1+a_{44}\\a_{41}=a_{44}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{42}=-1/2\\a_{44}=1/2\\a_{43}=-1/2\\a_{41}=1/2\end{cases}$$

Пошто су добијени сви матрични елементи тражене матрице оператора у апсолутном базису, она гласи

$$\left[\hat{O}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица адјунгована овој једнака је транспонованој матрици, пошто су сви матрични елементи реални бројеви. Она је једнака полазној матрици

$$\left[\hat{O}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матричним множењем добијене две матрице добија се

$$\begin{aligned}\left[\hat{O}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{O}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+1+1+1 & 1+1-1-1 & 1-1+1-1 & 1-1-1+1 \\ 1+1-1-1 & 1+1+1+1 & 1-1-1+1 & 1-1+1-1 \\ 1-1+1-1 & 1-1-1+1 & 1+1+1+1 & 1+1-1-1 \\ 1-1-1+1 & 1-1+1-1 & 1+1-1-1 & 1+1+1+1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\hat{I}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\end{aligned}$$

независно од редоследа множења, јер су матрице једнаке, те је

$$\left[\hat{O}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{O}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \left[\hat{O}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}}\left[\hat{O}\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \left[\hat{I}\right]_{\{|e_i\rangle\}}.$$

Из добијене формуле је јасно да мора бити

$$\left[\hat{O}^\dagger\right]_{\{|e_i\rangle\}} = \left[\hat{O}^{-1}\right]_{\{|e_i\rangle\}}$$

те је задати оператор заиста *ортогоналан*.

Ако је стварно тако, мора важити дефинициона формула: $\left\langle \hat{O}\langle v| \middle| \hat{O}|\bar{v}\rangle \right\rangle = \langle v|\bar{v}\rangle$, за произвољан вектор $|v\rangle = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. Она ће сада бити проверена у свом матричном облику

$$\left\langle \hat{O}\langle v| \middle| \hat{O}|v\rangle \right\rangle \longrightarrow$$

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\left[\hat{O}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}[v]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right)^{\dagger}\left(\left[\hat{O}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}[v]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right)\right]=\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}\right)^{\dagger}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4\\\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4\\\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4\\\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4\\\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4\\\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4\\\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4 & \xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4 & \xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4 & \xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4\\\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4\\\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4\\\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4 & \xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4 & \xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4 & \xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4\\\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4\\\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4\\\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\left[(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)^2+(\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)^2+(\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4)^2+(\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2+2\xi_1\xi_2+2\xi_1\xi_3+2\xi_1\xi_4+2\xi_2\xi_3+2\xi_2\xi_4+2\xi_3\xi_4$$

$$+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2+2\xi_1\xi_2-2\xi_1\xi_3-2\xi_1\xi_4-2\xi_2\xi_3-2\xi_2\xi_4+2\xi_3\xi_4$$

$$+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2-2\xi_1\xi_2+2\xi_1\xi_3-2\xi_1\xi_4-2\xi_2\xi_3-2\xi_2\xi_4-2\xi_3\xi_4$$

$$+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2-2\xi_1\xi_2+2\xi_1\xi_3+2\xi_1\xi_4+2\xi_2\xi_3-2\xi_2\xi_4-2\xi_3\xi_4)$$

$$=\frac{1}{4}(4\xi_1^2+4\xi_2^2+4\xi_3^2+4\xi_4^2)=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2=\xi_1\xi_1+\xi_2\xi_2+\xi_3\xi_3+\xi_4\xi_4=\xi_1^*\xi_1+\xi_2^*\xi_2+\xi_3^*\xi_3+\xi_4^*\xi_4$$

$$=\begin{bmatrix}\xi_1^* & \xi_2^* & \xi_3^* & \xi_4^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\xi_1^* & \xi_2^* & \xi_3^* & \xi_4^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\left([v]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}^{\dagger}[v]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right)$$

$$\longrightarrow \langle v|v\rangle$$

Како дефинициона формула за дати оператор важи за произвољни вектор, то је он заиста *ортогоналан* оператор.

(8.6) У простору реалних полинома $\mathbb{P}^n$ скаларни производ задат је изразом

$$\langle f_1(t)|\, f_2(t)\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i t^i \middle| \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i t^i \right\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \eta_i \,.$$

Испитати да ли су следећи оператори *ортогонални*

$$\text{(a)}\ \hat{O} f(t) = t^{n-1} f(t^{-1}), \quad \text{(б)}\ \hat{O} f(t) = f(-t),$$

где је $f(t) \in \mathbb{P}^n$.

(а) Да би задати оператор $\hat{O} f(t) = t^{n-1} f(t^{-1})$ био ортогоналан, мора да важи дефинициона формула

$$\left\langle \hat{O} f_1(t) \middle| \hat{O} f_2(t) \right\rangle = \langle f_1(t)|\, f_2(t)\rangle .$$

Прво се формира лева страна горњег израза, уз узимање у обзир начина деловања задатог оператора на произвољне функције из простора $\mathbb{P}^n$

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{O} f_1(t) \middle| \hat{O} f_2(t) \right\rangle &= \left\langle t^{n-1} f_1(t^{-1}) \middle| t^{n-1} f_2(t^{-1}) \right\rangle \\
&= \left\langle t^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (t^{-1})^i \middle| t^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i (t^{-1})^i \right\rangle \\
&= \left\langle t^{n-1} \left[\xi_0 (t^{-1})^0 + \xi_1 (t^{-1})^1 + \xi_2 (t^{-1})^2 + \ldots + \xi_{n-1} (t^{-1})^{n-1} \right] \middle| t^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i (t^{-1})^i \right\rangle \\
&= \left\langle t^{n-1} (\xi_0 + \xi_1 t^{-1} + \xi_2 t^{-2} + \ldots + \xi_{n-1} t^{-n+1}) \middle| t^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i (t^{-1})^i \right\rangle \\
&= \left\langle \xi_0 t^{n-1} + \xi_1 t^{n-2} + \xi_2 t^{n-3} + \ldots + \xi_{n-1} t^0 \middle| t^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i (t^{-1})^i \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\xi}_{n-1} t^{n-1} + \overline{\xi}_{n-1} t^{n-2} + \overline{\xi}_{n-3} t^{n-3} + \ldots + \overline{\xi}_0 t^0 \middle| t^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i (t^{-1})^i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\xi}_i t^i \middle| \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\eta}_i t^i \right\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\xi}_i \overline{\eta}_i = \langle f_1(t^{-1})|\, f_2(t^{-1})\rangle
\end{aligned}$$

Очигледно је да дефинициона формула важи, те је задати оператор заиста *ортогоналан*.

(б) Да би задати оператор $\hat{O} f(t) = f(-t)$ био ортогоналан, мора да важи дефинициона формула

$$\left\langle \hat{O} f_1(t) \middle| \hat{O} f_2(t) \right\rangle = \langle f_1(t)|\, f_2(t)\rangle .$$

Прво се формира лева страна горњег израза, уз узимање у обзир начина деловања задатог оператора на произвољне функције из простора $\mathbb{P}^n$

$$\left\langle \hat{O} f_1(t) \middle| \hat{O} f_2(t) \right\rangle = \langle f_1(-t)|\, f_2(-t)\rangle .$$

За *непарне* функције важи особина $f(-t) = -f(t)$, те је горњи израз једнак

$$\left\langle \hat{O} f_1(t) \middle| \hat{O} f_2(t) \right\rangle = \langle -f_1(t)| -f_2(t)\rangle = (-1)^*(-1)\langle f_1(t)|\, f_2(t)\rangle = \langle f_1(t)|\, f_2(t)\rangle .$$

За *парне* функције важи особина $f(-t) = f(t)$; у том случају горњи израз гласи

$$\left\langle \hat{O} f_1(t) \middle| \hat{O} f_2(t) \right\rangle = \left\langle f_1(t) \middle| f_2(t) \right\rangle .$$

У оба случаја, било парних било непарних функција, очигледно важи дефинициона формула, те је задати оператор заиста *ортогоналан*.

(8.7) У простору $\mathbb{C}^3$ задати су оператори $\hat{A}$ и $\hat{B}$ изразима

(а) $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_2,\xi_3,\xi_1)^*$,

(б) $\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1+i\xi_3,i\xi_1+\xi_3,\sqrt{2}\xi_2)^*$.

Показати да су оператори $\hat{A}$ и $\hat{B}$ *антиунитарни* оператори, и одредити матрице којима су представљени у апсолутном базису.

(а) Задати оператор $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_2,\xi_3,\xi_1)^*$ биће антиунитаран, ако важи следећа формула

$$\left\langle \hat{A}\langle v_1| \middle| \hat{A}|v_2\rangle\right\rangle=\langle v_1|v_2\rangle^*.$$

Прво се формира лева страна горњег израза

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{A}\langle v_1| \middle| \hat{A}|v_2\rangle\right\rangle&=\left\langle \hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \middle| \hat{A}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\right\rangle\\&=\left\langle(\xi_2,\xi_3,\xi_1)^* \middle| (\eta_2,\eta_3,\eta_1)^*\right\rangle=\left\langle(\xi_2^*,\xi_3^*,\xi_1^*)\middle|(\eta_2^*,\eta_3^*,\eta_1^*)\right\rangle\end{aligned}$$

Узимањем у обзир начина на који се израчунава скаларни производ две уређене тројке, биће

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{A}\langle v_1| \middle| \hat{A}|v_2\rangle\right\rangle&=(\xi_2^*)^*\eta_2^*+(\xi_3^*)^*\eta_3^*+(\xi_1^*)^*\eta_1^*=(\xi_2^*\eta_2)^*+(\xi_3^*\eta_3)^*+(\xi_1^*\eta_1)^*\\&=(\xi_1^*\eta_1+\xi_2^*\eta_2+\xi_3^*\eta_3)^*=\langle v_1|v_2\rangle^*\end{aligned}$$

Очигледно је да дефинициона формула важи, те је задати оператор заиста *антиунитаран*.

Матрица датог оператора у апсолутном базису добија се његовим деловањем на векторе тог базиса

$$\left\{\begin{aligned}\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle&=\hat{A}(1,0,0)=(0,0,1)^*=(0,0,1)=0|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+1|\mathrm{e}_3\rangle\\\hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle&=\hat{A}(0,1,0)=(1,0,0)^*=(1,0,0)=1|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+0|\mathrm{e}_3\rangle\\\hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle&=\hat{A}(0,0,1)=(0,1,0)^*=(0,1,0)=0|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+0|\mathrm{e}_3\rangle\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

(б) Да би задати оператор био антиунитаран, мора да важи дефинициона формула

$$\left\langle \hat{B}\langle v_1| \middle| \hat{B}|v_2\rangle\right\rangle=\langle v_1|v_2\rangle^*.$$

Прво се формира лева страна горњег израза

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{B}\langle v_1| \middle| \hat{B}|v_2\rangle\right\rangle&=\left\langle \hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \middle| \hat{B}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\right\rangle\\&=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1+i\xi_3,i\xi_1+\xi_3,\sqrt{2}\xi_2)^*\middle|\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1+i\eta_3,i\eta_1+\eta_3,\sqrt{2}\eta_2)^*\right\rangle\\&=\frac{1}{2}\left\langle(\xi_1+i\xi_3,i\xi_1+\xi_3,\sqrt{2}\xi_2)^*\middle|(\eta_1+i\eta_3,i\eta_1+\eta_3,\sqrt{2}\eta_2)^*\right\rangle\\&=\frac{1}{2}\left\langle\left((\xi_1+i\xi_3)^*,(i\xi_1+\xi_3)^*,\sqrt{2}\xi_2^*\right)\middle|\left((\eta_1+i\eta_3)^*,(i\eta_1+\eta_3)^*,\sqrt{2}\eta_2^*\right)\right\rangle\end{aligned}$$

Начин израчунавања скаларног производа две уређене тројке већ је знан

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{B}\langle v_1 \middle| \hat{B}|v_2\rangle\right\rangle &= \frac{1}{2}\left[\left((\xi_1+i\xi_3)^*\right)^*(\eta_1+i\eta_3)^* + \left((i\xi_1+\xi_3)^*\right)^*(i\eta_1+\eta_3)^* + 2\left(\xi_2^*\right)^*\eta_2^*\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left((\xi_1+i\xi_3)^*(\eta_1+i\eta_3)\right)^* + \left((i\xi_1+\xi_3)^*(i\eta_1+\eta_3)\right)^* + 2\left(\xi_2^*\eta_2\right)^*\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\xi_1+i\xi_3)^*(\eta_1+i\eta_3) + (i\xi_1+\xi_3)^*(i\eta_1+\eta_3) + 2\xi_2^*\eta_2\right]^* \\
&= \frac{1}{2}\left[(\xi_1^*-i\xi_3^*)(\eta_1+i\eta_3) + (-i\xi_1^*+\xi_3^*)(i\eta_1+\eta_3) + 2\xi_2^*\eta_2\right]^* \\
&= \frac{1}{2}(\xi_1^*\eta_1 - i\xi_3^*\eta_1 + \xi_1^* i\eta_3 - i^2\xi_3^*\eta_3 - i^2\xi_1^*\eta_1 + \xi_3^* i\eta_1 - i\xi_1^*\eta_3 + \xi_3^*\eta_3 + 2\xi_2^*\eta_2)^* \\
&= \frac{1}{2}(\xi_1^*\eta_1 - i\xi_3^*\eta_1 + i\xi_1^*\eta_3 + \xi_3^*\eta_3 + \xi_1^*\eta_1 + i\xi_3^*\eta_1 - i\xi_1^*\eta_3 + \xi_3^*\eta_3 + 2\xi_2^*\eta_2)^* \\
&= \frac{1}{2}(2\xi_1^*\eta_1 + 2\xi_2^*\eta_2 + 2\xi_3^*\eta_3)^* = (2\xi_1^*\eta_1 + 2\xi_2^*\eta_2 + 2\xi_3^*\eta_3)^* = \langle v_1|v_2\rangle^*
\end{aligned}
$$

Дефинициона формула је испуњена - задати оператор јесте *антиунитаран*.

Матрица датог оператора у апсолутном базису добија се деловањем истог на векторе поменутог базиса

$$
\left\{
\begin{aligned}
\hat{B}|\mathrm{e}_1\rangle &= \hat{B}(1,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle \\
\hat{B}|\mathrm{e}_2\rangle &= \hat{B}(0,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,\sqrt{2})^* = 0|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + 1|\mathrm{e}_3\rangle \\
\hat{B}|\mathrm{e}_3\rangle &= \hat{B}(0,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0)^* = -\frac{i}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle
\end{aligned}
\right.
\quad \Rightarrow \quad \left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.
$$

(8.8) Оператори $\hat{A}$ и $\hat{B}$ у коначно-димензионалном простору $\mathbb{U}^n$ су *унитарно слични* ако постоји унитарни оператор $\hat{C}$ у $\mathbb{U}^n$ такав да је

$$\hat{A}=\hat{C}^{-1}\hat{B}\,\hat{C}\,.$$

Показати да је унитарна сличност - *релација еквиваленције*.

Да би формула $\hat{A}=\hat{C}^{-1}\hat{B}\,\hat{C}$ била релација еквиваленције, морају да важе следеће особине

i) рефлексивност

$$\hat{C}=\hat{I}\;\Rightarrow\;\hat{A}=\hat{I}^{-1}\hat{A}\,\hat{I}=\hat{I}^{-1}\hat{I}\,\hat{A}=\hat{A}\,;$$

ii) симетричност

$$\hat{A}=\hat{C}^{-1}\hat{B}\,\hat{C}\;\Rightarrow\;\hat{C}\hat{A}=\hat{C}\,\hat{C}^{-1}\hat{B}\,\hat{C}\;\Leftrightarrow\;\hat{C}\hat{A}=\hat{B}\hat{C}\;\Rightarrow\;\hat{C}\hat{A}\hat{C}^{-1}=\hat{B}\hat{C}\,\hat{C}^{-1}\;\Leftrightarrow\;\hat{B}=\hat{C}\hat{A}\hat{C}^{-1}\,;$$

iii) транзитивност

$$\underline{\begin{cases}\hat{A}=\hat{C}^{-1}\hat{B}\,\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{F}^{-1}\hat{D}\,\hat{F}\end{cases}}\;\Rightarrow\;\hat{A}=\hat{C}^{-1}\hat{B}\,\hat{C}=\hat{C}^{-1}(\hat{F}^{-1}\hat{D}\,\hat{F})\,\hat{C}=(\hat{C}^{-1}\hat{F}^{-1})\,\hat{D}\,(\hat{F}\hat{C})=(\hat{F}\hat{C})^{-1}\hat{D}\,(\hat{F}\hat{C})\,.$$

Обратити пажњу да је производ два унитарна оператора такође унитаран оператор.

(8.9) Показати да су оператори $\hat{A}^{\dagger}\hat{A}$ и $\hat{A}\hat{A}^{\dagger}$ *унитарно слични* за сваки оператор $\hat{A}$.

Помоћу леве поларне форме $\hat{P}_L$, оператор $\hat{A}$ се изрази као $\hat{A}=\hat{U}_L\,\hat{P}_L$. Онда је $\hat{A}^{\dagger}=\hat{P}_L\,\hat{U}_L^{-1}$.

Прво се помноже адјунговани и сам оператор

$$\hat{A}^{\dagger}\hat{A}=\hat{P}_L\,\hat{U}_L^{-1}\,\hat{U}_L\,\hat{P}_L=\hat{P}_L\,\hat{I}\,\hat{P}_L=\hat{P}_L\,\hat{P}_L\,.$$

Потом се помножи сам оператор и њему адјунгован

$$\hat{A}\,\hat{A}^{\dagger}=\hat{U}_L\,\hat{P}_L\,\hat{P}_L\,\hat{U}_L^{-1}\;\Rightarrow\;\hat{U}_L^{-1}\hat{A}\,\hat{A}^{\dagger}\,\hat{U}_L=\hat{U}_L^{-1}\hat{U}_L\,\hat{P}_L\,\hat{P}_L\,\hat{U}_L^{-1}\hat{U}_L=\hat{I}\,\hat{P}_L\,\hat{P}_L\,\hat{I}=\hat{P}_L\,\hat{P}_L\,.$$

Десне стране горња два израза су једнаке, те су самим тим једнаке и леве

$$\hat{A}^{\dagger}\hat{A}=\hat{U}_L^{-1}\hat{A}\,\hat{A}^{\dagger}\,\hat{U}_L\,.$$

Овом формулом је показано да су оператори $\hat{A}^{\dagger}\hat{A}$ и $\hat{A}\hat{A}^{\dagger}$ унитарно слични.

(8.10) Доказати да скуп свих унитарних оператора (чије су детерминанте једнаке 1 у $n-$ димензионалном унитарном простору $\mathbb{U}^n$) формира, у односу на бинарну операцију множења оператора, *групу* $\mathbb{SU}(n)$ која је подгрупа групе $\mathbb{U}(n)$.

Да би скуп $\mathbb{SU}(n)=\left\{\hat{U}_i \,\middle|\, \det\hat{U}_i =1, (i=\overline{1,n})\right\}$ могао да се сматра *групом*, он мора да испуни следеће услове

i) **затвореност**: производ унитарних оператора (са детерминантом један) такође мора бити унитарни оператор (са детерминантом један)

$$\left\langle \hat{A}\hat{B}\langle v_1| \middle| \hat{A}\hat{B}|v_2\rangle\right\rangle = \left\langle \hat{A}\left(\hat{B}\langle v_1|\right) \middle| \hat{A}\left(\hat{B}|v_2\rangle\right)\right\rangle = \left\langle \hat{A}\langle \overline{v}_1| \middle| \hat{A}|\overline{v}_2\rangle\right\rangle .$$

Како је према поставци задатка $\hat{A}$ унитарни оператор, мора да важи да је

$$\left\langle \hat{A}\langle \overline{v}_1| \middle| \hat{A}|\overline{v}_2\rangle\right\rangle = \langle \overline{v}_1|\overline{v}_2\rangle ,$$

те следи да је

$$\left\langle \hat{A}\hat{B}\langle v_1| \middle| \hat{A}\hat{B}|v_2\rangle\right\rangle = \langle \overline{v}_1|\overline{v}_2\rangle = \left\langle \hat{B}\langle v_1| \middle| \hat{B}|v_2\rangle\right\rangle .$$

Пошто је и оператор $\hat{B}$ унитаран, мора бити

$$\left\langle \hat{B}\langle v_1| \middle| \hat{B}|v_2\rangle\right\rangle = \langle v_1|v_2\rangle ,$$

па се добија

$$\left\langle \hat{A}\hat{B}\langle v_1| \middle| \hat{A}\hat{B}|v_2\rangle\right\rangle = \langle v_1|v_2\rangle .$$

Овај израз уствари значи да је производ унитарних оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ и сам унитаран оператор.

Сад, детерминанта производа матрица једнака је производу детериминанти матрица

$$\det(\hat{A}\hat{B}) = \det\hat{A}\,\det\hat{B} = 1\cdot 1 = 1 .$$

Значи да је скуп $\mathbb{SU}(n)$ *затворен* у односу на операцију множења оператора.

ii) **асоцијативност**: према асоцијативности множења линеарних оператора, група $\mathbb{GL}(n)$

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C}|v\rangle = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})|v\rangle .$$

iii) **неутрални елемент** множења оператора јесте јединични оператор

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{I} = \hat{A}(\hat{B}\hat{I}) = \hat{A}\hat{B} \quad \text{и} \quad \hat{I}(\hat{A}\hat{B}) = (\hat{I}\hat{A})\hat{B} = \hat{A}\hat{B} .$$

iv) **инверзни елемент** множења оператора јесте оператор $\hat{A}^{\dagger}=\hat{A}^{-1}$ чија је детерминанта

$$\det\hat{A}^{-1} = \det\hat{A} = 1 .$$

Треба још показати да је оператор $\hat{A}^{-1}$ - унитаран. Како из израза

$$|v_1\rangle = \hat{A}|v_1'\rangle \quad \text{и} \quad |v_2\rangle = \hat{A}|v_2'\rangle$$

следе изрази

$$\left|v_1'\right\rangle = \hat{A}^{-1}\left|v_1\right\rangle \quad \text{и} \quad \left|v_2'\right\rangle = \hat{A}^{-1}\left|v_2\right\rangle ,$$

биће

$$\left\langle \hat{A}^{-1}\left\langle v_1\right|\left|\hat{A}^{-1}\left|v_2\right\rangle\right\rangle = \left\langle v_1'\middle|v_2'\right\rangle .$$

Пошто је према поставци задатка оператор $\hat{A}$ унитаран, мора да важи формула

$$\left\langle \hat{A}\left\langle v_1\right|\left|\hat{A}\left|v_2\right\rangle\right\rangle = \left\langle v_1\middle|v_2\right\rangle ,$$

те се на основу ње може изменити десна страна горњег израза

$$\left\langle \hat{A}^{-1}\left\langle v_1\right|\left|\hat{A}^{-1}\left|v_2\right\rangle\right\rangle = \left\langle \hat{A}\left\langle v_1'\right|\left|\hat{A}\left|v_2'\right\rangle\right\rangle .$$

Сада се примовани вектори напишу преко својих дефиниција, што даје

$$\left\langle \hat{A}^{-1}\left\langle v_1\right|\left|\hat{A}^{-1}\left|v_2\right\rangle\right\rangle = \left\langle v_1\middle|v_2\right\rangle ,$$

чиме је доказано да је оператор $\hat{A}^{-1}$ заиста унитаран.